SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 2001-2002

Angelo Favini

IL PROBLEMA DEL REGOLATORE PER UN SISTEMA DIFFERENZIALE SINGOLERE

27 novembre 2001

Tecnoprint - Bologna 2003

Sunto. Si considera il problema del regolatore per una equazione differenziale degenere in uno spazio di Hilbert. Si mostra che il problema é riconducibile al caso regolare mediante opportuno cambiamento di variabile.
Si forniscono esempi di applicazione ad equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali.

Summary. The regulator problem for a degenerate differential equation in a Hilbert space is investigated. It is shown that a suitable change of variable argument reduces the minimum problem to the one for a regular system.
Examples of application to ordinary differential equations and partial differential equations are given.

0 Introduzione

In questo seminario si considera il problema del regolatore per il sistema singolare

$$\frac{d}{dt}(My)(t) + Ly(t) = Bu(t), \quad 0 < t < \tau < +\infty, \tag{0.1}$$

$$(My)(0) = My_0, \tag{0.2}$$

dove L, M sono operatori lineari chiusi nello spazio di Hilbert reale H, B é un operatore lineare continuo dallo spazio di Hilbert reale U in H, (brevemente, $B \in \mathcal{L}(U, H)$), il dominio $\mathcal{D}(L)$ di L é contenuto nel dominio $\mathcal{D}(M)$ di M, L ha inverso limitato e y_0 é un dato elemento di $\mathcal{D}(L)$.
M puó essere non invertibile, ma si suppone che $z = 0$ sia un polo semplice per il risolvente $(z + T)^{-1}$, dove

$$T = ML^{-1}, \tag{0.3}$$

cioé

$$\|M(zL + M)^{-1}\|_{L(H)} \leq C|z|^{-1}, \quad 0 < |z| \leq \epsilon_0, \tag{0.4}$$

per opportune costanti positive C, ϵ_0.
Nella monografia [8] di Favini e Yagi si possono trovare vari esempi concreti di equazioni alle derivate parziali soddisfacenti l'equazione (0.4). Per brevitá, la norma dell'operatore in $\mathcal{L}(H) := \mathcal{L}(H, H)$ verrá denotata con $\|\cdot\|$.
Si associa al problema (0.1),(0.2) il funzionale costo quadratico

$$J(u) := \int_0^\tau \{\langle Ky, y\rangle_H + \langle Nu, u\rangle_U\} dt \tag{0.5}$$

dove $K = K^* \geq 0$, $N = N^* > 0$ sono operatori lineari autoaggiunti in H e in U, rispettivamente.
L'obiettivo principale del seminario é di mostrare che $J(u)$ é minimizzato in U, cioé esiste un unico controllo $u^* \in L^2(0, \tau; U)$ tale che

$$J(u^*) = \min_{u \in L^2(0,\tau;U)} J(u). \tag{0.6}$$

In effetti, qui ci limiteremo a considerare un caso un po' piú particolare, nel senso che verrá precisato in seguito, ma il risultato finale é vero in generale, come provato nel lavoro [3] di Barbu, Favini e Pandolfi. Tuttavia, la tecnica é sostanzialmente la stessa, e vengono utilizzati i ben noti risultati di J.L. Lions nella monografia [11] relativi ad equazioni non degeneri.
Il problema di minimo (0.1), (0.2), (0.6) é ampiamente considerato in letteratura. Esso é fondamentalmente motivato da ricerche in teoria dei sistemi e dei controlli automatici, dove H, U hanno dimensione finita. Ricordiamo i lavori di Bender e Laub [4], di Cobb [6], Pandolfi [12], le monografie di Campbell [5] e Dai [7], il survey [10] di Lewis. Piú recentemente, sempre facendo ricorso alla tecnica di J.L. Lions, il problema é stato considerato da Sviridyuk ed Efremov [13] e da Barbu e Favini [2].
Si noti che l'assunzione (0.4) é davvero essenziale, perché consente di trattare funzionali costo $J(u)$ in (0.5) non contenenti le derivate di $u(t)$ (come in Sviridyuk-Efremov [13]).

Si potrebbe naturalmente studiare il problema anche quando i coefficienti operatoriali dipendono dal tempo oppure quando il costo é

$$\int_0^\tau \{\langle Ky, y\rangle_H + 2\langle y, Ru\rangle_H + \langle Nu, u\rangle_U\}dt,$$

dove $R \in \mathcal{L}(U; H)$, purché la matrice operatoriale

$$\begin{bmatrix} K & R \\ R^* & N \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(H \times U)$$

sia ≥ 0 nello spazio prodotto $H \times U$ munito del prodotto interno $\langle,\rangle_H + \langle,\rangle_U$.
Risultati interessanti concernenti l'equazione (0.1) a coefficienti dipendenti dal tempo si possono trovare nel lavoro [1] di Balla e März.

1 Risultati principali

E' ben noto che, sotto l'assunzione (0.4), vale la rappresentazione di H come somma diretta

$$H = N(T) \oplus R(T), \tag{1.1}$$

dove $N(T)$ e $R(T)$ denotano rispettivamente lo spazio nullo e il rango (immagine) di T. Inoltre, $R(T)$ é anche un sottospazio chiuso di H. $N(T)$ e $R(T)$ sono quindi spazi di Hilbert con la norma indotta da H. Denoteremo con P l'operatore di proiezione su $N(T)$ lungo $R(T)$. L'assunzione ulteriore che faremo é

$$P \text{ é autoaggiunto.} \tag{1.2}$$

Il cambiamento di variabile $Ly = x$ trasforma il problema (0.1), (0.2) in

$$\frac{d}{dt}(Tx)(t) + x(t) = Bu(t), \quad 0 < t < \tau, \tag{1.3}$$

$$(Tx)(0) = Tx_0, \tag{1.4}$$

dove

$$x_0 = Ly_0. \tag{1.5}$$

Notiamo che il cambiamento di variabile apportato evidenzia la regolaritá della soluzione che cerchiamo, cioé soluzioni strette.
Il funzionale costo $J(u)$ diventa

$$J(u) = \int_0^\tau \{\langle L^{*^{-1}} KL^{-1}x(t), x(t)\rangle_H + \langle Nu(t), u(t)\rangle_U\}dt. \tag{1.6}$$

Osserviamo ora (scrivendo $\langle,\rangle$ al posto di $\langle,\rangle_H$, per semplicitá) che in forza della assunzione (1.2) (P autoaggiunto)

$$\langle L^{*^{-1}} KL^{-1}x, x\rangle = \langle (I-P)L^{*^{-1}} KL^{-1}(I-P)x, (I-P)x\rangle + \langle PL^{*^{-1}} KL^{-1}(I-P)x, Px\rangle$$

$$+\langle (I-P)L^{*^{-1}} KL^{-1}Px, (I-P)x\rangle + \langle PL^{*^{-1}} KL^{-1}Px, Px\rangle. \tag{1.7}$$

Inoltre, il sistema (1.1), (1.2) é equivalente al problema algebrico-differenziale

$$\frac{d}{dt}\tilde{T}(I-P)x(t)+(I-P)x(t)=(I-P)Bu(t), \quad 0<t<\tau, \tag{1.8}$$

$$\tilde{T}(I-P)x(0)=\tilde{T}(I-P)x_0, \tag{1.9}$$

$$Px(t)=PBu(t), \quad 0<t<\tau, \tag{1.10}$$

dove $\tilde{T}$ denota la restrizione di T a $R(T)$. Si vede facilmente che $\tilde{T}\in\mathcal{L}(R(T))$ ed ha inverso limitato. Pertanto (1.8), (1.9) si riduce al sistema regolare

$$\frac{d}{dt}(I-P)x(t)+\tilde{T}^{-1}(I-P)x(t)=\tilde{T}^{-1}(I-P)Bu(t), 0<t<\tau, \tag{1.11}$$

$$(I-P)x(0)=(I-P)x_0. \tag{1.12}$$

Sostituendo l'espressione (1.10) per $Px(t)$ nella (1.7), si ottiene

$$\langle L^{*^{-1}}KL^{-1}x\rangle=\langle (I-P)L^{*^{-1}}KL^{-1}(I-P)x,(I-P)x\rangle$$

$$+\langle (I-P)L^{*^{-1}}KL^{-1}PBu,(I-P)x\rangle+\langle B^*PL^{*^{-1}}KL^{-1}(I-P)x,u\rangle_U$$

$$+\langle B^*PL^{*^{-1}}KL^{-1}Bu,u\rangle_U.$$

Nello spazio $R(T)\times U$ introduciamo il prodotto interno

$$\langle((I-P)x,u),((I-P)y,v)\rangle=\langle (I-P)x,(I-P)y\rangle_H+\langle u,v\rangle_U \tag{1.13}$$

con $x,y\in H$, $u,v\in U$.
Allora $J(u)$ é espresso da

$$J(u)=\int_0^\tau\langle\begin{bmatrix}\bar{F} & \mathcal{H}\\ \mathcal{H}^* & \bar{G}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(I-P)x\\ u\end{bmatrix},\begin{bmatrix}(I-P)x\\ u\end{bmatrix}\rangle dt, \tag{1.14}$$

dove gli operatori $\bar{F}$, $\mathcal{H}$, $\bar{G}$ sono definiti da

$$\bar{F}=(I-P)L^{*^{-1}}KL^{-1}(I-P), \tag{1.15}$$

$$\mathcal{H}=(I-P)L^{*^{-1}}KL^{-1}PB\in\mathcal{L}(U,R(T)), \tag{1.16}$$

$$\bar{G}=N+B^*PL^{*^{-1}}KL^{-1}PB\in\mathcal{L}(U). \tag{1.17}$$

Osserviamo che $\bar{G}$ in (1.17) ha inverso limitato ed é positivo. Il nostro scopo é ridurre l'espressione di $J(u)$ in (1.6) ad una forma "diagonale", a cui si possano applicare risultati noti.

Poniamo

$$w = u + \bar{G}^{-1}\mathcal{H}^*(I-P)x, \tag{1.18}$$

$$\tilde{F} = \bar{F} - \mathcal{H}\bar{G}^{-1}\mathcal{H}^*. \tag{1.19}$$

Allora si vede che

$$J(u) = J(w) = \int_0^T \langle \begin{bmatrix} \tilde{F} & 0 \\ 0 & \bar{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I-P)x \\ w \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (I-P)x \\ w \end{bmatrix} \rangle dt. \tag{1.20}$$

D'altra parte,

$$\begin{bmatrix} \bar{F} & \mathcal{H} \\ \mathcal{H}^* & \bar{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \mathcal{H}\bar{G}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{F} & 0 \\ 0 & \bar{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \bar{G}^{-1}\mathcal{H}^* & I \end{bmatrix},$$

cosicché

$$\begin{bmatrix} \tilde{F} & 0 \\ 0 & \bar{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -\mathcal{H}\bar{G}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{F} & \mathcal{H} \\ \mathcal{H}^* & \bar{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\bar{G}^{-1}\mathcal{H}^* & I \end{bmatrix}.$$

Pertanto,

$$\langle \begin{bmatrix} \tilde{F} & 0 \\ 0 & \bar{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I-P)x \\ w \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (I-P)x \\ w \end{bmatrix} \rangle$$

$$= \langle \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\bar{G}^{-1}\mathcal{H}^* & I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \bar{F} & \mathcal{H} \\ \mathcal{H}^* & \bar{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\bar{G}^{-1}\mathcal{H}^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I-P)x \\ w \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (I-P)x \\ w \end{bmatrix} \rangle$$

$$= \langle \begin{bmatrix} \bar{F} & \mathcal{H} \\ \mathcal{H}^* & \bar{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\bar{G}^{-1}\mathcal{H}^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I-P)x \\ w \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\bar{G}^{-1}\mathcal{H}^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I-P)x \\ w \end{bmatrix} \rangle.$$

Inoltre,

$$\begin{bmatrix} \bar{F} & \mathcal{H} \\ \mathcal{H}^* & \bar{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I-P & 0 \\ B^*P & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^{*^{-1}}KL^{-1} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I-P & PB \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

e cosí

$$\langle \begin{bmatrix} \tilde{F} & 0 \\ 0 & \bar{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I-P)x \\ w \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (I-P)x \\ w \end{bmatrix} \rangle$$

$$= \langle \begin{bmatrix} I-P & 0 \\ B^*P & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^{*^{-1}}KL^{-1} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I-P & PB \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\bar{G}^{-1}\mathcal{H}^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I-P)x \\ w \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -\bar{G}^{-1}\mathcal{H}^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I-P)x \\ w \end{bmatrix} \rangle$$

$$= \langle \begin{bmatrix} L^{*^{-1}}KL^{-1} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I-P & PB \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\bar{G}^{-1}\mathcal{H}^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I-P)x \\ w \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} I-P & PB \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\bar{G}^{-1}\mathcal{H}^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I-P)x \\ w \end{bmatrix} \rangle \geq 0.$$

Cioé, si é scritto $J(u)$ nella forma

$$J(u) = J(w) = \int_0^\tau \{\langle \tilde{F}(I-P)x, (I-P)x\rangle_{R(T)} + \langle \bar{G}w, w\rangle_U\} dt \tag{1.21}$$

dove $\bar{G} > 0$ e $\tilde{F} : R(T) \to R(T)$ é non-negativo.
Poiché dalla (1.18) $w = u + \bar{G}^{-1}\mathcal{H}^*(I-P)x$, si ha $u = w - \bar{G}^{-1}\mathcal{H}^*(I-P)x$, cosicché l'equazione (1.11) si legge

$$\frac{d}{dt}(I-P)x(t) = -\tilde{T}^{-1}(I + (I-P)B\bar{G}^{-1}\mathcal{H}^*)(I-P)x(t) = \tilde{T}^{-1}(I-P)Bw(t), \quad 0 < t < \tau. \tag{1.22}$$

Di qui, il problema originale (0.1), (0.2), (0.6) é equivalente a

$$\min_{w \in L^2(0,\tau;U)} J(w), \tag{1.23}$$

dove $J(w)$ é espresso dalla (1.20) e $(I-P)x(t)$ e $w(t)$ sono legati dalla (1.22) e dalla condizione iniziale (1.12). Ora, (1.22), (1.12), (1.23) é un problema di minimo regolare. Si puó allora stabilire il seguente risultato.

Teorema 1. *Sotto le assunzioni (0.4), (1.2), esiste un unico controllo $u^* \in L^2(0,\tau;U)$ ed esiste una corrispondente soluzione ottima $y^* \in L^2(0,\tau;H)$, $My^* \in H^1(0,\tau;H)$ del sistema (0.1), (0.2) che minimizza $J(u)$ su $L^2(0,\tau;U)$.*

Osservazione 1. Se gli operatori L ed M sono limitati ed autoaggiunti, $L > 0$, potremo in ogni caso considerare il problema (0.1), (0.2), (0.6) in una topologia di H per cui P é autoaggiunto (vedi Kato [9], p. 419). Introducendo, infatti, il prodotto interno in H

$$(x, y) = \langle Lx, y\rangle_H, \quad x, y \in H, \tag{1.24}$$

l'equazione (0.1) si legge equivalentemente

$$\frac{d}{dt}(L^{-1}My(t)) + y(t) = L^{-1}Bu(t), \quad 0 < t < \tau, \tag{1.25}$$

dove $L^{-1}M \in \mathcal{L}(H)$ e

$$(L^{-1}Mx, y) = \langle Mx, y\rangle = \langle x, My\rangle = \langle Lx, L^{-1}My\rangle = (x, L^{-1}My).$$

Inoltre,

$$\int_0^\tau \langle Ky, y\rangle dt = \int_0^\tau \langle LL^{-1}Ky, y\rangle dt = \int_0^\tau (L^{-1}Ky, y) dt$$

e

$$(L^{-1}Kx, y) = \langle Kx, y\rangle = \langle x, Ky\rangle = \langle Lx, L^{-1}Ky\rangle = (x, L^{-1}Ky).$$

dicono che $L^{-1}K$ é autoaggiunto ≥ 0.
Dunque, (0.1), (0.2), (0.6) é equivalente a (1.25) insieme alla condizione iniziale

$$(L^{-1}My)(0) = L^{-1}My_0,$$

e con funzionale costo

$$J(u) = \int_0^\tau \{(L^{-1}Ky, y) + \langle Nu, u\rangle_U\} dt.$$

Poiché

$$(z + L^{-1}M)^{-1} = (zL + M)^{-1}L,$$

$z = 0$ é un polo semplice per il risolvente di $L^{-1}M$ ed il corrispondente proiettore P é autoaggiunto.

Osservazione 2. Se L ed M sono operatori autoaggiunti, con lo stesso dominio, e commutano, allora T é autoaggiunto, cosicché anche P é autoaggiunto.

La riduzione del problema di partenza a (1.22), (1.12), (1.23), (si noti che $\tilde{F} \in \mathcal{L}(R(T))$) permette di scrivere la relativa equazione di Riccati (in $\mathcal{L}(R(T))$). Precisamente, posti

$$A = -\tilde{T}^{-1}(I + (I-P)B\bar{G}^{-1}H^*)(I-P) \in \mathcal{L}(R(T)), \tag{1.26}$$

$$C = -\tilde{T}^{-1}(I-P)B \in \mathcal{L}(U; R(T)), \tag{1.27}$$

utilizzando Zabczyck [14], pp. 133-134, esiste una unica soluzione $P(t) \in \mathcal{L}(R(T))$ dell'equazione di Riccati

$$\frac{d}{dt}P(t) = \tilde{F} + P(t)A + A^*P(t) - P(t)C\bar{G}^{-1}C^*P(t), \quad 0 \le t \le \tau, \tag{1.28}$$

$$P(0) = 0, \tag{1.29}$$

tale che $P(t)^* = P(t) \ge 0$ e $P(t)$ é fortemente differenziabile. Naturalmente, si identificherá $R(T)^*$ con $R(T)$.
Inoltre, il valore minimo di $J(w)$ é $\langle P(\tau)(I-P)Ly_0, (I-P)Ly_0\rangle_{R(T)}$, mentre il controllo ottimo w^* di (1.23) é

$$w^*(t) = -\bar{G}^{-1}C^*P(\tau - t)(I-P)x^*(t), \quad 0 \le t \le \tau, \tag{1.30}$$

dove $(I-P)x^*(\cdot)$ soddisfa il sistema

$$\frac{d}{dt}(I-P)x^*(t) = (A - C\bar{G}^{-1}C^*P(\tau - t))(I-P)x^*(t), \quad 0 \le t \le \tau, \tag{1.31}$$

$$(I-P)x^*(0) = (I-P)x_0. \tag{1.32}$$

Tenendo conto della relazione (1.18), si vede che il controllo ottimo $u^*(\cdot)$ é dato da

$$\begin{aligned} u^*(t) &= w^*(t) - \bar{G}^{-1}\mathcal{H}^*(I-P)x^*(t) \\ &= -\bar{G}^{-1}\{C^*P(\tau - t) + \mathcal{H}^*\}(I-P)x^*(t). \end{aligned} \tag{1.33}$$

Poiché $Ly(\cdot) = x(\cdot)$, deduciamo che il controllo ottimo $u^*(\cdot)$ e la corrispondente soluzione ottima $y^*(\cdot)$ sono legati da

$$u^*(t) = -\bar{G}^{-1}\{C^*P(\tau - t) + \mathcal{H}^*\}(I - P)Ly^*(t). \tag{1.34}$$

Osserviamo esplicitamente che in virtú della (1.33) il controllo ottimo é continuo su $[0, \tau]$.

Osservazione 3. Se introduciamo

$$p^*(t) = P(\tau - t)(I - P)x^*(t), \quad 0 \leq t \leq \tau, \tag{1.35}$$

cosicché

$$C^*p^*(t) + \bar{G}w^*(t) \equiv 0, \tag{1.36}$$

allora $p^*(\cdot)$ soddisfa

$$\frac{d}{dt}p^*(t) = -A^*p^*(t) - \tilde{F}(I - P)x^*(t), \tag{1.37}$$

$$p(\tau) = 0. \tag{1.38}$$

Cosí $((I - P)x^*, p^*, w^*)$ é soluzione di un problema two-point che in effetti caratterizza la soluzione ottima.
Si puó dimostrare che il controllo ottimo e la corrispondente soluzione ottima sono in effetti univocamente determinati mediante il seguente sistema algebrico-differenziale.

Teorema 2. *Sotto le assunzioni precedenti, la coppia ottima (y^*, u^*) é, rispettivamente, la prima e terza componente della soluzione del problema*

$$\frac{d}{dt}(My)(t) + Ly(t) = Bu(t), \quad 0 < t < \tau,$$

$$-M^*\frac{dp}{dt}(t) + L^*p(t) = Ky(t), \quad 0 < t < \tau,$$

$$B^*p(t) + Nu(t) = 0, \quad 0 < t < \tau,$$

$$My(0) = My_0, \quad M^*p(\tau) = 0,$$

dove $y \in L^2(0, \tau; \mathcal{D}(L))$, $My^* \in H^1(0, \tau; H)$, $p^* \in H^1(0, \tau; H)$, $p^* \in L^2(0, \tau; \mathcal{D}(L))$, $u^* \in L^2(0, \tau; U)$.

2 Esempi ed applicazioni

Esempio 1. Vediamo con un esempio semplice come si applica concretamente il Teorema 1.
Consideriamo il sistema

$$\frac{d}{dt}(x+y)(t)+x(t)=2u(t), \quad 0<t<1, \tag{2.1}$$

$$\frac{d}{dt}(x+y)(t)+y(t)=u(t), \quad 0<t<1, \tag{2.2}$$

$$(x+y)(0)=\xi_0. \tag{2.3}$$

Sottraendo e poi sommando la (2.2) alla (2.1), si ottiene

$$x-y=u, \tag{2.4}$$

$$2(x+y)'(t)+(x+y)(t)=3u(t). \tag{2.5}$$

Posto $x+y=\xi$, si ha

$$x=\frac{1}{2}(u+\xi), \quad y=\frac{1}{2}(\xi-u), \tag{2.6}$$

dove $\xi(\cdot)$ soddisfa

$$\dot{\xi}=-\frac{\xi}{2}+\frac{3}{2}u, \quad 0<t<1. \tag{2.7}$$

Vogliamo minimizzare

$$J(u)=\int_0^1(x^2+2y^2+u^2)dt. \tag{2.8}$$

Si osserva che

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_0^1\{\frac{1}{4}(\xi+u)^2+\frac{1}{2}(\xi-u)^2+u^2\}dt \\ &= \int_0^1\langle\begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & 7/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi \\ u \end{bmatrix},\begin{bmatrix} \xi \\ u \end{bmatrix}\rangle dt. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Posto (cfr. la dimostrazione del Teorema 1)

$$w=u-\xi/7, \tag{2.10}$$

allora

$$J(u)=J(w)=\int_0^1(\frac{5}{7}\xi^2+\frac{7}{4}w^2)dt, \tag{2.11}$$

mentre il problema (2.7), (2.3) diventa

$$\xi'(t)=-\frac{2}{7}\xi(t)+\frac{3}{2}w(t), \tag{2.12}$$

$$\xi(0)=\xi_0. \tag{2.13}$$

Se cerchiamo

$$\inf_{w} J(u) = \inf_{w} J(w), \tag{2.14}$$

problema del regolatore classico, sappiamo che il controllo ottimo $w(\cdot)$ é caratterizzato da

$$w(t) = -\frac{6}{7}P(1-t)\xi(t), \tag{2.15}$$

dove $P(t)$ é la soluzione dell'equazione di Riccati

$$\frac{d}{dt}P(t) = \frac{5}{7} - \frac{4}{7}P(t) - \frac{9}{7}P(t)^2, \quad 0 \leq t \leq 1, \tag{2.16}$$

$$P(t) \geq 0, \quad P(0) = 0, \tag{2.17}$$

e $\xi(t)$ soddisfa

$$\frac{d}{dt}\xi(t) = -(\frac{2}{7} + \frac{9}{7}P(1-t))\xi(t), \quad 0 < t < 1, \quad \xi(0) = \xi_0. \tag{2.18}$$

Dalla (2.10) segue che il controllo ottimo per il problema di minimo relativo a $J(u)$ coi vincoli (2.1)~(2.3) é caratterizzato da

$$u(t) = \frac{1}{7}(1 - 6P(1-t))\xi(t) \tag{2.19}$$

e

$$x(t) = \frac{1}{2}(u(t) + \xi(t)), \quad y(t) = \frac{1}{2}(\xi(t) + u(t)). \tag{2.20}$$

Questo fornisce la sintesi desiderata del problema.

Esempio 2. Consideriamo l'equazione astratta nello spazio di Hilbert H

$$\frac{d}{dt}(A - z_0)y = Ay + Bu, \quad 0 < t < \tau, \tag{2.21}$$

dove $B \in \mathcal{L}(U, H)$, U é uno spazio di Hilbert, A é un operatore lineare chiuso densamente definito, con inverso limitato e $z = z_0$ é un polo semplice di $(z-A)^{-1}$. Prendiamo $L = -A$, $M = A - z_0$. Allora $T = ML^{-1} = z_0A^{-1} - I$ e

$$\begin{aligned}(z - T)^{-1} &= A((z+1)A - z_0)^{-1} = (z+1)^{-1}A(A - \frac{z_0}{z+1})^{-1} \\ &= (z+1)^{-1}A(A - z_0 + \frac{z_0 z}{z+1})^{-1}\end{aligned} \tag{2.22}$$

per $0 < |z| \leq \epsilon$, ϵ piccolo. Poiché

$$A(A - z_0 + \frac{z_0 z}{z+1})^{-1} = I + \frac{z_0}{I + z}(A - z_0 + \frac{z_0 z}{z+1})^{-1}$$

e
$$\|A(A - z_0 + \frac{z_0 z}{z+1})^{-1}\| \leq 1 + C|z|^{-1} \leq C'|z|^{-1}, \quad 0 < |z| \leq \epsilon,$$
dalla (2.22) concludiamo che esiste $C_1 > 0$ tale che
$$\|(z - T)^{-1}\| \leq C_1|z|^{-1}, \quad 0 < |z| \leq \epsilon,$$

cosicché tutti i risultati si applicano. In effetti, il Teorema 1 richiederebbe A autoaggiunto, ma, come precedentemente osservato, tale assunzione puó essere eliminata. L'equazione (2.21) é il modello di alcune equazioni alle derivate parziali di tipo Sobolev nello spazio $H = L^2(\Omega)$, dove Ω é un aperto limitato di R^n a frontiera regolare, A é un operatore differenziale ellittico di ordine $2m$, $m \geq 1$, con condizioni ai limiti o Dirichlet o Neumann o miste, e $z = z_0$ é un autovalore isolato semplice dell'operatore differenziale (con le date condizioni ai limiti).

BIBLIOGRAFIA

[1] K. Balla, R. März, *Linear differential algebraic equations of index 1 and their adjoint equations,* Result Math. 37 (2000), 13-35.

[2] V. Barbu, A. Favini, *Control of degenerate differential systems,* Control and Cybernetics 28 (1999), No. 3, 397-420.

[3] V. Barbu, A. Favini, L. Pandolfi *Optimal regulation with quadratic cost functional of a degenerate system,* to appear.

[4] D.J. Bender, A.J. Laub, *The linear-quadratic optimal regulator for descriptor systems,* IEEE Trans. Automatic Control Vol. AC-32, No.8 (1987), 672-688.

[5] S.L. Campbell, "Singular systems of differential equations", Pitman, San Francisco, 1980.

[6] D. Cobb, *Descriptor variable systems and optimal state regulation,* IEEE Trans. Automatic Control Vol. AC-28, No.5 (1983), 601-611.

[7] L. Dai, "Singular control systems", LN Control Information Sciences 118, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1989.

[8] A. Favini, A. Yagi, "Degenerate differential equations in Banach spaces", Pure Appl. Math. 215, M. Dekker, New York-Basel-Hong Kong, 1999.

[9] T. Kato, "Perturbation theory for linear operators", Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1966.

[10] F.L. Lewis, *A survey of linear singular systems,* Circuits Syst. & Signal Process. 5, no. 1 (1986), 3-36.

[11] J.L. Lions, "Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles", Dunod, Paris, 1968.

[12] L. Pandolfi, *On the regulator problem for linear degenerate control systems,* J. Opt. Theory Appl. 33 (1981), 241-254.

[13] G.A. Sviridyuk, A.A. Efremov, *Optimal control of Sobolev type linear equations with relatively p-sectorial operators,* Diff. Uravnenia 31 (1995), 1912-1916, (English translation : Diff. Eqs. 31 (1995), 1882-1890).

[14] J. Zabczyck, "Mathematical control theory: an introduction", Birkhäuser Verlag, Boston-Basel-Berlin, 1992.